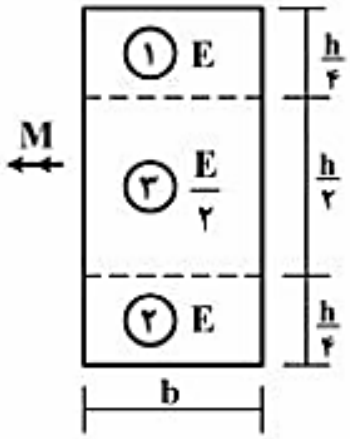
حل سوالات آزمون دکتری عمران–۹۶

حسین صباغیان

۱- در تیری با مقطع مرکب مطابق شکل، تحت بارگذاری نشان داده شده، نسبت مدول مقطع الاستیک ($S = \frac{M}{\sigma_{max}}$) آن به مدول مقطع تیر دیگری به عرض b، ارتفاع h و مدول ارتجاعی یکنواخت E کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۸}{۷}$

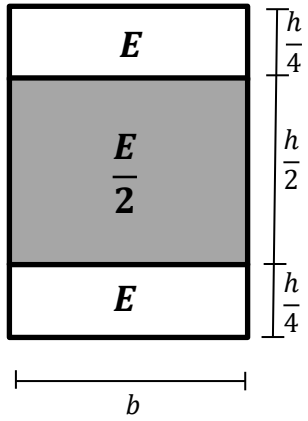
۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

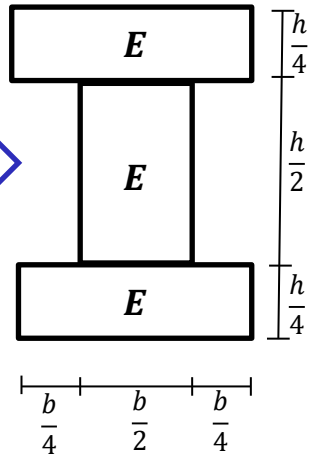
حل:

برای محاسبه نسبت مدول مقطع الاستیک این مقطع ناهمگن به مقطع همگن مشابه داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{I_{e1}}{I_2} \times \frac{C_2}{C_1}$$

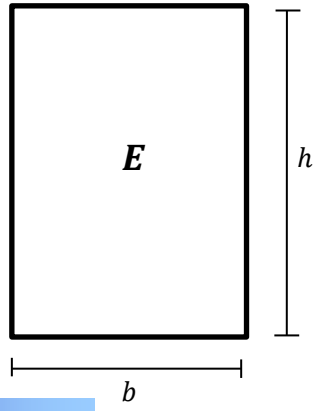
(1)





$$\begin{cases} I_{e1} = \dfrac{bh^3}{12} - 2 \times \dfrac{\frac{b}{4}(\frac{h}{2})^3}{12} = \dfrac{5bh^3}{64} \\ C_1 = \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

(2)



$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{bh^3}{12} \\ C_2 = \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{I_{e1}}{I_2} \times \frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{5bh^3}{64}}{\frac{bh^3}{12}} \times 1 = \frac{15}{16}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است

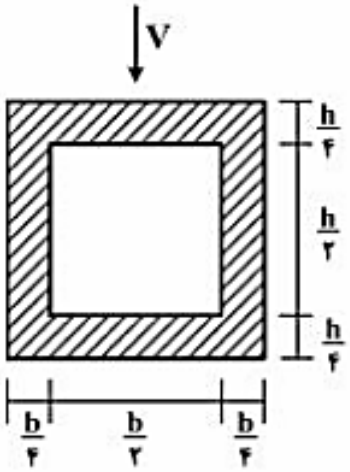
۲- در تیری با مقطع توخالی مطابق شکل، بر اثر نیروی برشی V، بیشینه تنش برشی چه ضریبی از $\frac{V}{bh}$ می‌باشد؟

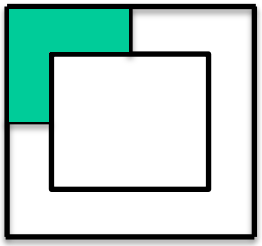
۱) ۳

۲) $\frac{۱۴}{۵}$

۳) $\frac{۱۶}{۵}$

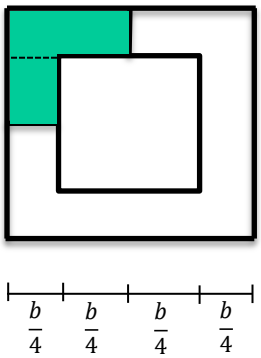
۴) $\frac{۱۸}{۵}$





حل:

تنش برشی حداکثر مقطع روی محور خنثی ظاهر شده و روی محور تقارن مقطع، تنش برشی صفر می باشد. بنابراین برای محاسبه ممان استاتیک در رابطه تنش برشی حداکثر از سطح هاشور خورده شکل مقابل استفاده میکنیم(که سطح بین محور خنثی تا نزدیکترین نقطه تنش صفر میباشد):



$$\tau_{max} = \tau_{N.A} = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = \frac{b}{2} \times \frac{h}{4} \times \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{8}\right) + \frac{b}{4} \times \frac{h}{4} \times \frac{h}{8} = \frac{7bh^2}{128}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} = \frac{5bh^3}{64} \quad , t = \frac{b}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{V \times \frac{7bh^2}{128}}{\frac{5bh^3}{64} \times \frac{b}{4}} = \frac{14}{5} \times \frac{V}{bh}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است

۳- تانسور تنش در نقطه P توسط $\sigma_{\circ}=\begin{bmatrix}۷ & -۵ & ۰\\ -۵ & ۳ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ داده شده است. بردار تنش که از نقطه P عبور نموده و موازی با صفحه ABC با مختصات: $A=\begin{pmatrix}۴\\ ۰\\ ۰\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}۰\\ ۲\\ ۰\end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix}۰\\ ۰\\ ۶\end{pmatrix}$ کدام است؟

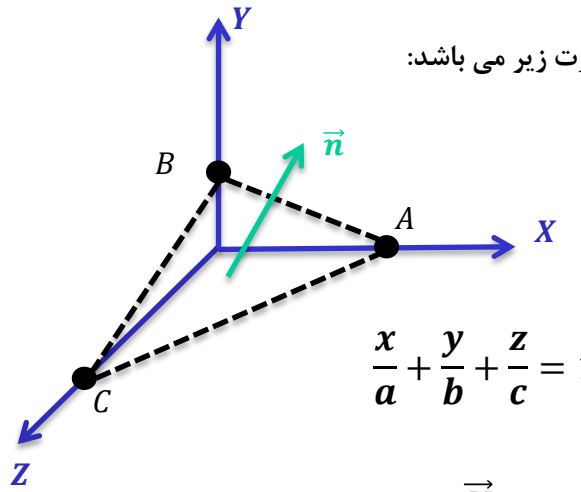
۱) $\bar{\sigma}=\frac{۵}{۷}\bar{i}+\frac{۹}{۷}\bar{j}+\frac{۱۰}{۷}\bar{k}$

۲) $\bar{\sigma}=\frac{۵}{۷}\bar{i}-\frac{۹}{۷}\bar{j}+\frac{۱۰}{۷}\bar{k}$

۳) $\bar{\sigma}=-\frac{۹}{۷}\bar{i}+\frac{۵}{۷}\bar{j}+\frac{۱۰}{۷}\bar{k}$

۴) $\bar{\sigma}=\frac{۹}{۷}\bar{i}-\frac{۵}{۷}\bar{j}+\frac{۱۰}{۷}\bar{k}$

معادله صفحه ای که محور های مختصات را در نقاط A،B و C قطع می کند به صورت زیر می باشد:



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1 \rightarrow 3x+6y+2z=12$$

بردار نرمال یکه:

$$\vec{N}=(3,6,2) \rightarrow \vec{n}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{(3,6,2)}{\sqrt{(3^2+6^2+2^2)}}=(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7})$$

$$\vec{\sigma}=\sigma_0 \times \vec{n}=\begin{bmatrix}7 & -5 & 0\\ -5 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix}\frac{3}{7}\\ \frac{6}{7}\\ \frac{2}{7}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{-9}{7}\\ \frac{5}{7}\\ \frac{10}{7}\end{Bmatrix} \rightarrow \vec{\sigma}=\frac{-9}{7}\vec{i}+\frac{5}{7}\vec{j}+\frac{10}{7}\vec{k}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است

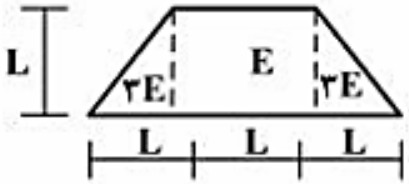
۴- مقطع غیرهمگن مطابق شکل تحت اثر لنگر خمشی مثبت قرار دارد. نسبت حداکثر کرنش کششی به حداکثر کرنش فشاری کدام است؟

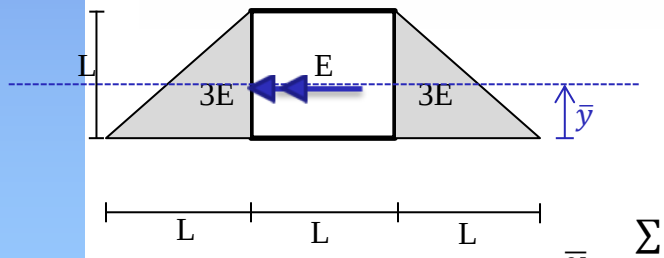
۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

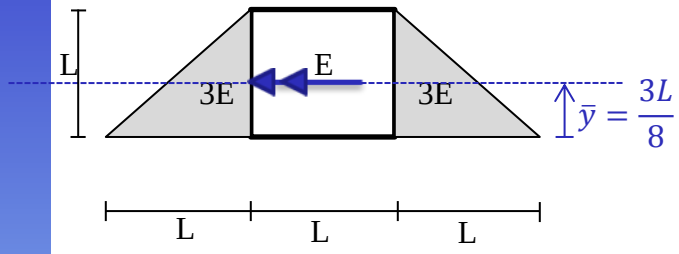




حل:

ابتدا مرکز سطح مقطع معادل را به دست می آوریم:

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i E_i y_i}{\sum A_i E_i} = \frac{(\frac{L \times L}{2} \times 3E \times \frac{L}{3}) \times 2 + (L \times L \times E \times \frac{L}{2})}{(\frac{L \times L}{2} \times 3E) \times 2 + (L \times L \times E)} = \frac{3L}{8}$$



$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho} \rightarrow \varepsilon_{max} = -\frac{y_{max}}{\rho}$$

$$\rho = cte \Rightarrow \frac{(\varepsilon_{max})^t}{(\varepsilon_{max})^c} = \frac{(y_{max})^t}{(y_{max})^c} = \frac{\bar{y}}{L - \bar{y}} = \frac{\frac{3L}{8}}{L - \frac{3L}{8}} = \frac{3}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است

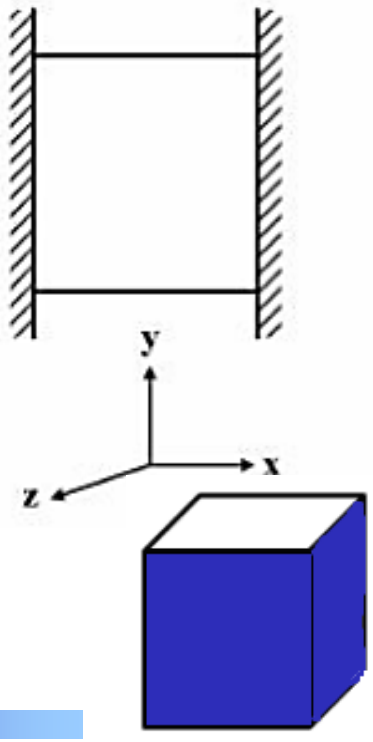
۵- مکعبی به ضلع a درون محفظه‌ای قرار دارد و فقط می‌تواند در جهت قائم تغییر طول بدهد. اگر دمای این مکعب به اندازه ΔT افزایش داده شود، تغییر طول ضلع قائم مکعب (در جهت y) کدام است (α ضریب انبساط حرارتی، ν ضریب پواسون و E مدول ارتجاعی مکعب است؟

۱) $\frac{\nu}{1-\nu}\alpha\Delta Ta$

۲) $\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\Delta Ta$

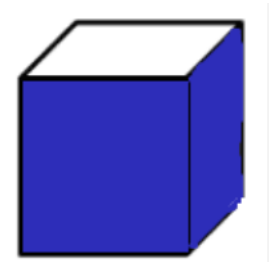
۳) $\frac{1+2\nu}{1-\nu}\alpha\Delta Ta$

۴) $\frac{1-\nu}{2+\nu}\alpha\Delta Ta$

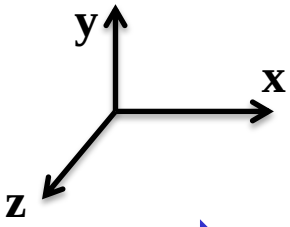


مکعب در راستاهای x و z بسته است: $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$

مکعب در راستای y تغییرطول میدهد: $\sigma_y = 0$



$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \vartheta(\cancel{\sigma_y}^{0} + \sigma_z)) + \alpha\Delta T = 0 \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \vartheta(\sigma_x + \cancel{\sigma_y}^{0})) + \alpha\Delta T = 0 \end{cases}$$



حل دستگاه معادلات

$$\Longrightarrow \sigma_x = \sigma_z \rightarrow \frac{1}{E}(\sigma_x - \vartheta(0 + \sigma_x) + \alpha\Delta T = 0 \rightarrow \sigma_x = \frac{-E\alpha\Delta T}{(1-\vartheta)}$$

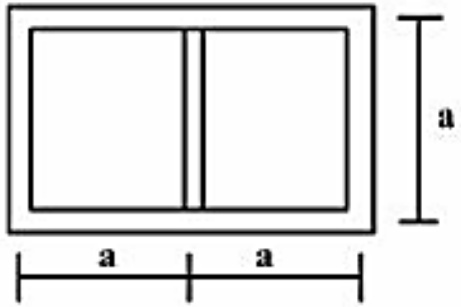
$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_z = \frac{-E\alpha\Delta T}{(1-\vartheta)}$$

$$\Delta L = a\varepsilon_y = a \times \left[\frac{1}{E}(\cancel{\sigma_y}^{0} - \vartheta(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha\Delta T\right] = a \times \left[\frac{-\vartheta}{E}\left(\frac{-E\alpha\Delta T}{(1-\vartheta)} + \frac{-E\alpha\Delta T}{(1-\vartheta)}\right) + \alpha\Delta T\right]$$

$$\Delta L = a\alpha\Delta T\left(\frac{2\vartheta}{1-\vartheta} + 1\right) = a\alpha\Delta T\left(\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است

۶- مقطع جدار نازک مطابق شکل تحت تأثیر ممان پیچشی T قرار می‌گیرد. اگر ضخامت تمام جداره‌ها برابر t باشد، تنش برشی در جداره‌های داخلی و خارجی به‌ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

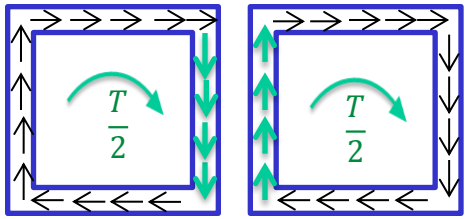


۱) صفر، صفر

۲) $\frac{T}{4ta^2}$ ، صفر

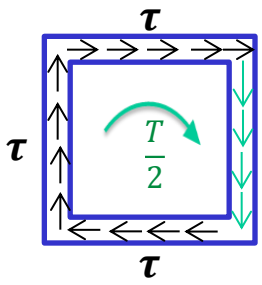
۳) صفر، $\frac{T}{4ta^2}$

۴) $\frac{T}{4ta^2}$ ، $\frac{T}{4ta^2}$



مقطع از دو سلول بسته یکسان تشکیل شده و لنگر پیچشی به طور مساوی بین این سلول ها توزیع می شود. در صورتیکه تنش های برشی ایجاد شده در جداره ها را رسم کنیم ملاحظه می شود جهت تنش ها در طرفین جداره میانی از دو سلول بسته مخالف یکدیگر بوده و برآیند آنها صفر می باشد.

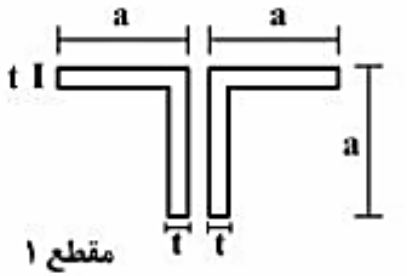
در ادامه، تنش های برشی در جداره های خارجی نیز به صورت زیر محاسبه می شود:

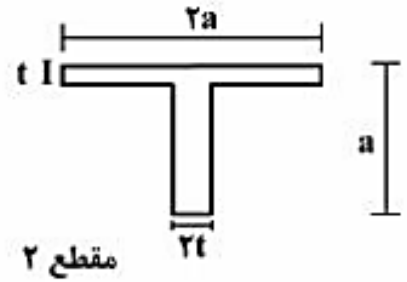


$$\tau = \frac{\frac{T}{2}}{2A_m t} = \frac{\frac{T}{2}}{2 \times (a \times a) \times t} = \frac{T}{4a^2 t}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است

۷- دو مقطع شماره یک و دو مطابق شکل به ترتیب تحت لنگرهای پیچشی T_1 و T_2 قرار می‌گیرند. نسبت لنگرها $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$ را طوری تعیین کنید که در هر دو مقطع، زاویه چرخش در واحد طول آن‌ها یکسان باشد $(a > 10\,t)$ ؟





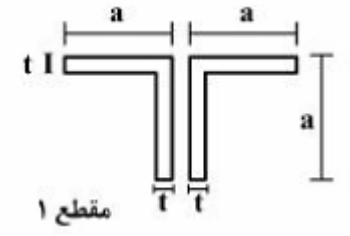
۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۵
۴) ۰/۶

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \rightarrow \frac{\varphi}{L} = \frac{T}{GJ}$$

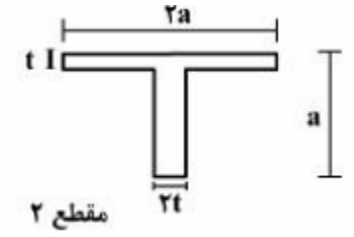
$$\left(\frac{\varphi}{L}\right)_1 = \left(\frac{\varphi}{L}\right)_2 \rightarrow \frac{T_1}{G_1 J_1} = \frac{T_2}{G_2 J_2} \rightarrow \frac{T_1}{J_1} = \frac{T_2}{J_2} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2}$$

در مقاطع جدار نازک باز داریم:

$$J = \frac{1}{3}\sum a_i t_i^{\,3}$$



$$J_1 = \frac{1}{3}\sum a_i t_i^{\,3} = \frac{1}{3} \times 2 \times \left[2 \times at^3\right] = \frac{4}{3}at^3$$

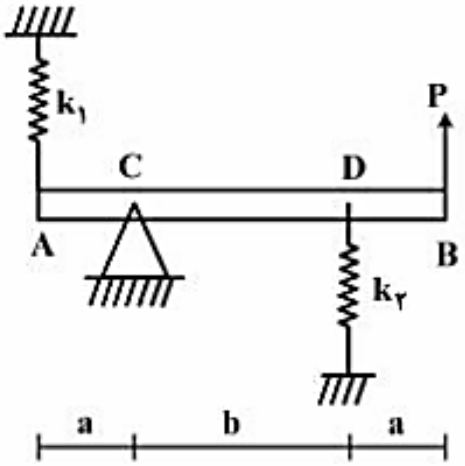


$$J_2 = \frac{1}{3}\sum a_i t_i^{\,3} = \frac{1}{3} \times \left[2at^3 + a(2t)^3\right] = \frac{10}{3}at^3$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}} = 0.4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است

۸- در تیر مطابق شکل، مقدار حداکثر نیروی P بر حسب پارامترهای k_1، k_2، a و b و θ کدام یک از موارد زیر است (θ زاویه چرخش تیر در C بوده و فرض کنید تیر صلب است)؟

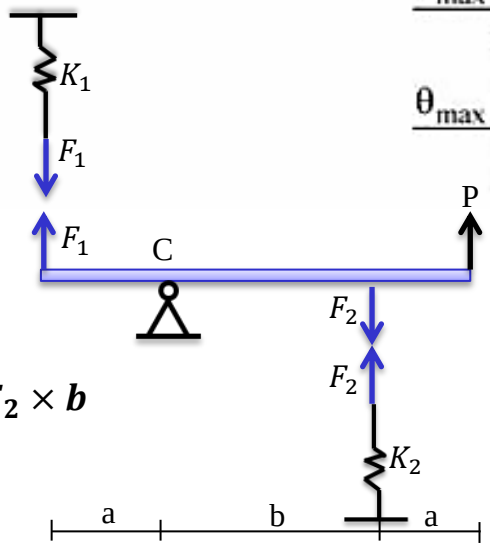


۱) $\frac{\theta_{max}(a^2k_1+b^2k_2)}{a+b}$

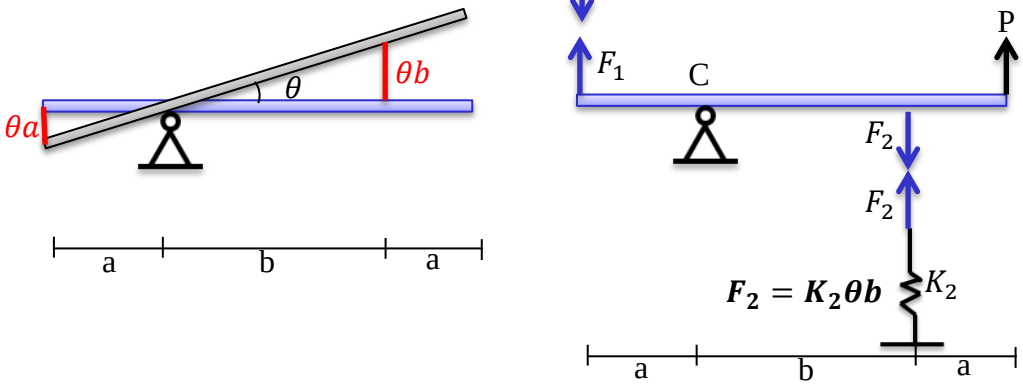
۲) $\frac{\theta_{max}(b^2k_1+a^2k_2)}{a+b}$

۳) $\frac{\theta_{max}(a^3k_1+b^3k_2)}{(a+b)^2}$

۴) $\frac{\theta_{max}(b^3k_1+a^3k_2)}{(a+b)^2}$



$$\sum M_c = 0 \rightarrow P \times (a+b) = F_1 \times a + F_2 \times b$$



$$\sum M_c = 0 \rightarrow P \times (a+b) = F_1 \times a + F_2 \times b \rightarrow P \times (a+b) = (K_1\theta a) \times a + (K_2\theta b) \times b$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{\theta(K_1 a^2 + K_2 b^2)}{(a+b)} \quad \Rightarrow \quad \text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است}$$

۹- میله AC بین دو تکیه‌گاه ثابت A و C قرار گرفته است. در اثر تغییر درجه حرارت، نسبت تنش ایجاد شده در قسمت AB به تنش ایجاد شده در قسمت BC کدام است؟

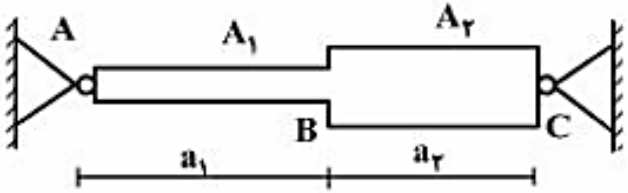
(A_1 و A_2 به ترتیب مساحت مقطع قسمت‌های AB و BC می‌باشند).

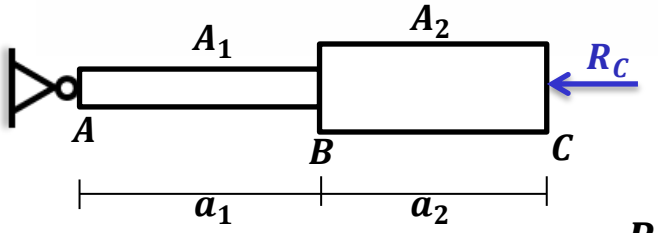
۱) یک

۲) $\frac{A_2 a_1}{A_1 a_2}$

۳) $\frac{A_2 a_2}{A_1 a_1}$

۴) $\frac{A_2}{A_1}$





حل: میله نامعین بوده و برای حل به روش نرمی یکی از قید های تکیه گاهی آن را آزاد کرده و یک معادله سازگاری را برقرار می کنیم. ($\Delta_C = 0$)

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_{BC}} = \frac{\frac{R_C}{A_1}}{\frac{R_C}{A_2}} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است

۱۰- هسته مرکزی یک مقطع به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a کدام است؟

۱) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{a}{۴}$

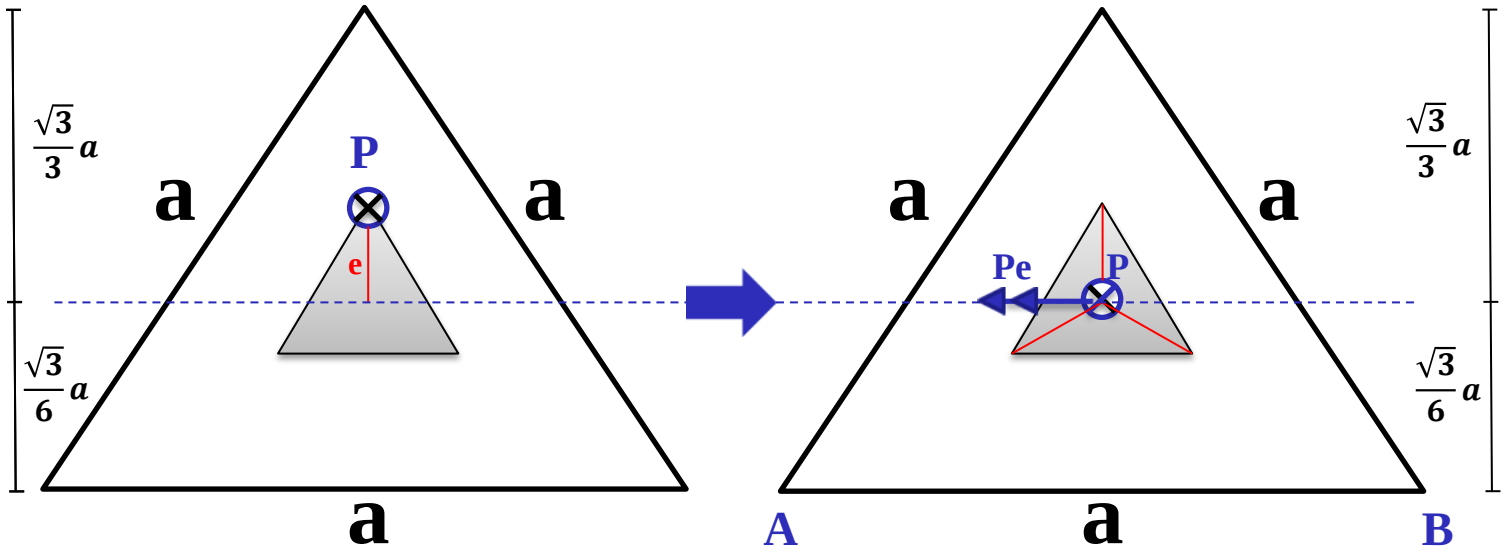
۲) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{a}{۳}$

۳) یک لوزی به قطر $\frac{۱}{۲}a$

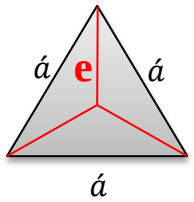
۴) یک لوزی به قطر $\frac{۲}{۳}a$

حل:

هسته یک مقطع مکان هندسی نقاطی از مقطع می باشد که اگر نیروی فشاری عمود بر مقطع در این نقاط به مقطع اعمال گردد تار خنثی بر مقطع مماس شده و در هیچ نقطه ای از مقطع تنش کششی بوجود نمی آید. هسته یک چند ضلعی منتظم یک چند ضلعی منتظم است که اگر تعداد اضلاع آن فرد باشد اضلاع هسته با اضلاع هسته موازی هستند.بنابراین هسته یک مثلث متساوی الاضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع است که هم مرکز با آن بوده و اضلاع آن موازی با مثلث است.برای یافتن اضلاع این مثلث نیروی فشاری را در رأس این مثلث قرار داده و تنش در دورترین تار کششی را برابر صفر قرار می دهیم.



$$\sigma_{AB} = 0 \rightarrow -\frac{P}{A} + \frac{My_{AB}}{I} = 0 \rightarrow \frac{-P}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} + \frac{Pe \times \frac{\sqrt{3}a}{6}}{\frac{1}{36} \times a \times (asin60)^3} = 0 \rightarrow e = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$



$$\acute{a} = 2ecos30 = \frac{a}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است