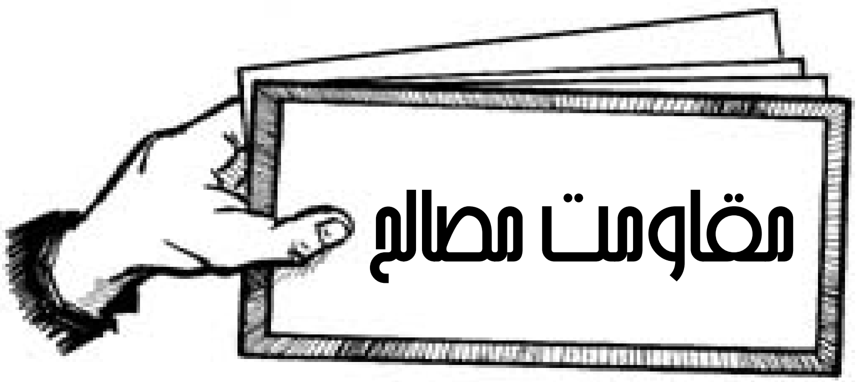
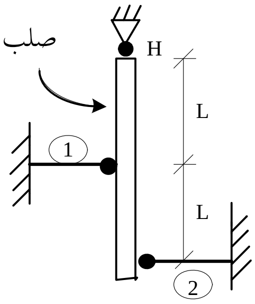


- ابتدا نکات و تست‌هایی از مباحث گذشته:

مثال (کنکور ارشد ۸۰): اگر جنس و طول هر دو میلهٔ ۱ و ۲ یکسان باشد و درجه حرارت میلـهٔ ۱ بـه انـدازهٔ $\Delta T+$ افـزایش یابـد، عکس‌العمل افقی H چقدر است؟



حل: با نوشتن معادلهٔ تعادل حول نقط H به دست می‌آید: $F_1 = 2F_2$

پس اگر در اثر تغییر درجه حرارت، در میلهٔ ۱، نیروی فشاری F ایجاد شود، در میلهٔ ۲ نیروی فشاری $\frac{F}{2}$ خواهیم داشت.

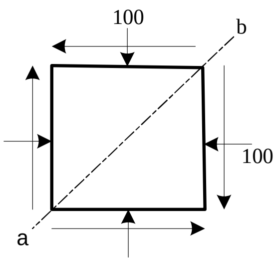
همچنین از سازگاری تغییر مکان‌ها به دست می‌آید: $\Delta_2 = 2\Delta_1$

پس داریم:

$$\Delta_1 = \alpha L\Delta T - \frac{FL}{EA} \qquad \Delta_2 = \frac{\left(\frac{F}{2}\right)L}{EA} \qquad \Delta_2 = 2\Delta_1 \Rightarrow \alpha L\Delta T = \frac{FL}{EA}\left(2+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow F = 0/8AE\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow H_X = \frac{F_1}{2} = \frac{F}{2} = 0/4AE\alpha\Delta T$$

– مثال (کنکور ارشد ۷۹): برای المان مربع شکل روبرو، هر دو تنش محوری و برشی روی صفحه قطری برابر صفر می‌باشـد. تـنش برشی چقدر است؟

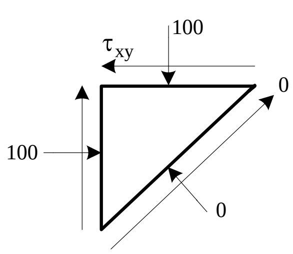


۱) صفر ۲) ۵۰

۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

حل: مسأله بسیار ساده است و فقط کافی است تعادل نیروها در المان روبرو ارضا شود

$$\sum F_X = \sum F_y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 100$$



نکته: یادمان باشد:

EI= صلبیت خمشی GJ= صلبیت پیچشی EA= صلبیت محوری

هر چه صلبیت بالاتر باشد، تغییر شکل متناظر با آن صلبیت کمتر می‌باشد.

به عنوان مثال برای مقایسهٔ زاویه پیچیدگی دو مقطع تحت اثر لنگر پیچشی کافی است، عکس نسبت صلبیت آنها را به همدیگر به دست آوریم.

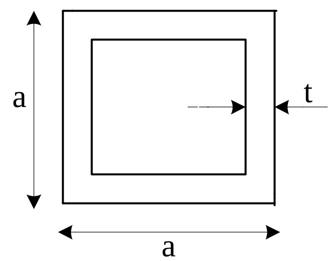
نکته: نسبت مقاومت پیچشی دو مقطع، برابر است با عکس نسبت تنش‌های برشی آن دو. (البته با لنگرهای مساوی)

مثال (کنکور ارشد ۸۰): دو مقطع جدار نازک بسته داریم که طول ضلع مقطع اول دو برابر ضلع دوم و ضخامت جدار مقطع اول نصف مقطع دوم می‌باشد. اگر $\alpha = \frac{\text{مقاومت پیچشی مقطع اول}}{\text{مقاومت پیچشی مقطع دوم}}$ و $\beta = \frac{\text{صلبیت پیچشی مقطع اول}}{\text{صلبیت پیچشی مقطع دوم}}$ باشد. α و β به ترتیب کدامند؟

۱) ۱ و ۱ ۲) ۲ و ٤ ۳) ۲ و ۲ ٤) ۲ و ۸

حل

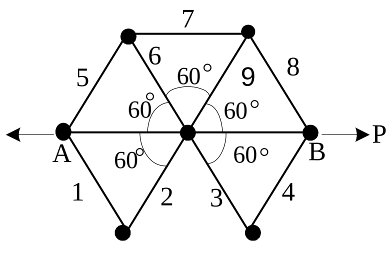
$$\alpha = \frac{\text{مقاومت پیچشی ۱}}{\text{مقاومت پیچشی ۲}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\dfrac{\cancel{T}}{\cancel{2}A_{m2}t_2}}{\dfrac{\cancel{T}}{\cancel{2}A_{m1}t_1}} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2} = \frac{2\times 2\cancel{A_{m2}}\times\frac{1}{2}\cancel{t_2}}{\cancel{A_{m2}}\times\cancel{t_2}} = 2$$



$$\beta = \frac{\text{صلبیت پیچشی ۱}}{\text{صلبیت پیچشی ۲}} = \frac{G_1J_1}{G_2J_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\dfrac{\cancel{4}A_{m1}^2}{\left(\oint\frac{ds}{t}\right)_1}}{\dfrac{\cancel{4}A_{m2}^2}{\left(\oint\frac{ds}{t}\right)_2}} = \frac{\dfrac{(2\times 2A_{m2})^2}{4\times\dfrac{2a}{\frac{1}{2}t_2}}}{\dfrac{A_{m2}^2}{4\times\dfrac{a}{t_2}}} = 4$$

گزینه ۲ درست است.

مثال (کنکور ارشد ۸٤): در شکل روبرو کلیه میله‌ها به طول L به سطح مقطع A و مدول ارتجاعی E می‌باشند. تغییر مکان نسبی A به B چقدر است؟



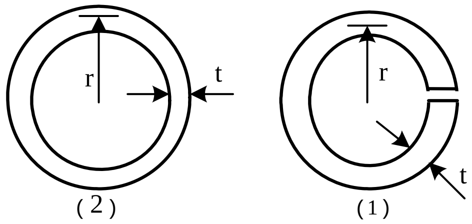
۱) $\frac{PL}{EA}$ ۲) $\frac{2PL}{EA}$

۳) $\frac{7PL}{EA}$ ($\frac{11PL}{EA}$

حل شکل در ابتدا کمی شلوغ به نظر می‌رسد ولی با کمی دقت می‌توان فهمید که بجز دو میلهٔ افقی که نیروی P به آنها وارد می‌شود بقیه میله‌ها صفر نیرویی‌اند. (برای راحتی تشخیص میله‌های صفر نیرویی، میله‌ها شماره گذاری شده‌اند از میلهٔ ۱ شروع کرده و پیش بروید). و در نتیجه، فقط این دو میله هستند که باعث دور شدن A و B از هم می‌گردند (طبق $\Delta = \frac{EL}{EA}$) پس داریم:

$$\Delta_{A\to B} = 2\times\frac{FL}{EA}\left(\ ,F=P\right) \Rightarrow \Delta = \frac{2PL}{EA}$$

گزینه ۲ صحیح است.



مثال: اگر در دو مقطع روبرو نسبت $\frac{r}{t}=۱۰$ باشد مطلوبست تعیین $\frac{\phi_۱}{\phi_۲}$؟

حل: مقطع ۱ جدار نازک باز و مقطع ۲ جدار نازک بسته است.

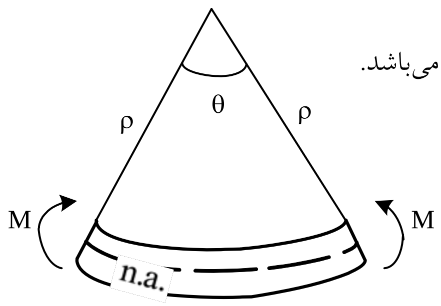
و می‌دانیم که در مقاطع جدار نازک باز، شکل مقطع مهم نیست و فقط طول مقطع مهم می‌باشد که در اینجا طول مقطع ۱ برابر $۲\pi r$ است و می‌دانیم که نسبت $\frac{\phi_۱}{\phi_۲}$ برابر است با نسبت $\frac{\text{صلبیت پیچشی ۲}}{\text{صلبیت پیچشی ۱}}$.

$$\frac{\phi_۱}{\phi_۲}=\frac{G_۲J_۲}{G_۱J_۱}=\frac{J_۲}{J_۱} \qquad J_۱=\frac{۱}{۳}at^۳=\frac{۱}{۳}(۲\pi r)t^۳=\frac{۱}{۳}(۲\pi\times۱۰t)t^۳=\frac{۲۰\pi}{۳}t^۴$$

$$J_۲=\frac{۴A_m^۲}{\oint\frac{ds}{t}}=\frac{۴\times\left(\pi r^۲\right)^۲}{\frac{۲\pi r}{t}}=\frac{۴\pi^۲r^۴}{۲\pi\times۱۰}=\frac{۲\pi\times۱۰^۴t^۴}{۱۰}=۲\pi\times۱۰^۳t^۴\Rightarrow\frac{\phi_۱}{\phi_۲}=\frac{۲\pi\times۱۰^۳t^۴}{\frac{۲۰\pi}{۳}t^۴}=۳۰۰$$

ملاحظه می‌شود که تحت یک لنگر ثابت، یک مقطع جدار نازک باز ۳۰۰ برابر بیشتر از یک مقطع جدار نازک بسته با ابعاد و مساحت یکسان، پیچیده می‌شود. (با نسبت $\frac{r}{t}=۱۰$)

خمش:



بدون تردید، خمش مهم‌ترین و پرسؤال‌ترین مبحث مقاومت مصالح کنکور کارشناسی ارشد عمران می‌باشد.

یادآوری: خمش خالص

فاصله از تار خنثی

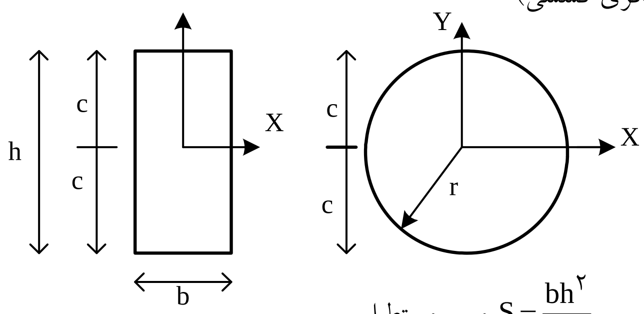
$\varepsilon=-\frac{y}{\rho}$ کرنش

شعاع انحناء

ثابت می‌شود: $\sigma=\frac{My}{I}$ که در این رابطه، M لنگر خمشی وارده به مقطع، y فاصلهٔ نقطه مورد محاسبه از تار خنثی و I ممان اینرسی می‌باشد.

بدیهی است طبق رابطه فوق هر چه y بیشتر باشد تنش خمشی بزرگ‌تر است.

پس σ_{max} در تارهای بالایی و پایینی مقطع اتفاق می‌افتد. (یکی فشاری و دیگری کششی)



$$\sigma_{max}=\pm\frac{MC}{I}=\pm\frac{M}{S} \quad , \quad S=\frac{I}{C}$$

– به خاطر داشته باشیم:

$S=\frac{\pi r^۳}{۴}$ دایره $\qquad$ $S=\frac{bh^۲}{۶}$ مربع مستطیل

– نسبت مقاومت خمشی دو مقطع برابر است با نسبت مستقیم S های آنها به هم.

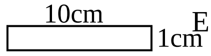
– شعاع انحناء:

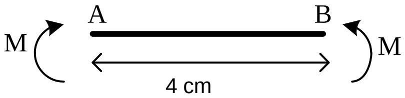
صلبیت خمشی

$\rho=\frac{EI}{M}$ شعاع انحناء

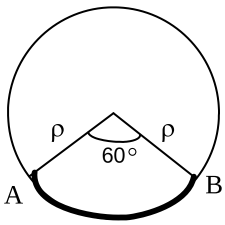
لنگر خمشی

مثال: نوار فلزی به طول ٤ m مطابق شکل با لنگر خمشی M به صورت یک قوس ۶۰° از یک دایره درآمده است. تنش خمشی حداکثر ایجاد شده در آن را حساب نمائید. $E = ۲\times۱۰^۶ \, kg/cm^۲$





حل



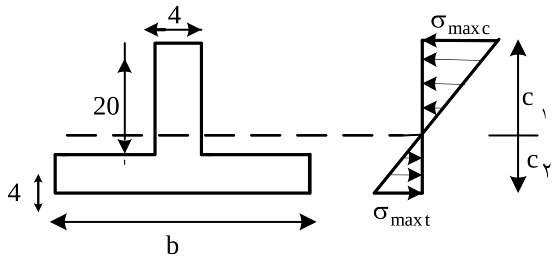
شعاع انحناء $\rho =$ شعاع دایره $R = \dfrac{۶L}{۲\pi} = \dfrac{۶\times۴}{۲\pi} = ۳/۸۲m$

$$I = \frac{۱۰\times۱^۳}{۱۲} = ۰/۸۳۳cm^۴$$

$$\rho = R = \frac{EI}{M} \Rightarrow ۳/۸۲\times۱۰۰ = \frac{۲\times۱۰^۶\times۰/۸۳۳}{M} \Rightarrow M = ۴۳۶۳kg.cm$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{bh^۲}{۶}} = \frac{۶\times۴۳۶۳}{۱۰\times۱^۲} = ۲۶۱۸kg/cm^۲$$

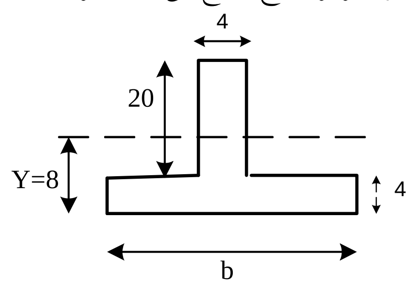
مثال: در شکل مقابل b را طوری تعیین کنید که اگر لنگر خمشی مثبت به تیر وارد شود تنش فشاری max دو برابر تنش کششی max شود.



حل با فرض کردن تار خنثی در یک تراز دلخواه، طبق شکل زیر داریم:

$$\frac{\sigma_{max\,c}}{\sigma_{max\,t}} = ۲ = \frac{c_۱}{c_۲} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c_۱}{c_۲} = ۲ \\ c_۱ + c_۲ = ۲۰ + ۴ = ۲۴ \end{cases} \Rightarrow c_۱ = ۱۶, c_۲ = ۸$$

حال که مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ به دست آمد، مقطع باید ابعادی داشته باشد که تار خنثی آن (که محور مرکز سطح مقطع می‌باشد) مرز جدا کنندهٔ $c_۱$ و $c_۲$ باشد.

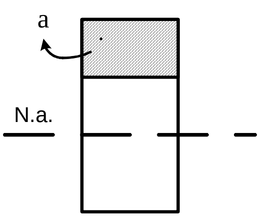


$$\bar{Y}_{\text{نسبت به کف}} = \frac{(b\times۴)\times۲ + (۲۰\times۴)\left(\frac{۲۰}{۲}+۴\right)}{b\times۴ + ۲۰\times۴} = ۸ \Rightarrow b = ۲۰$$

نکته: به طور کلی اگر یک تیر ارتجاعی بر اثر یک بارگذاری دارای شعاع انحناء $\rho_۱$ و در اثر بارگذاری دیگر شعاع انحناء $\rho_۲$ باشد شعاع انحناء تیر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: (با فرض $\sigma = E\varepsilon^n$)

$$\left(\frac{۱}{\rho}\right)^n = \left(\frac{۱}{\rho_۱}\right)^n + \left(\frac{۱}{\rho_۲}\right)^n$$

و در صورتی که رابطه تنش-کرنش خطی باشد به رابطه $\dfrac{۱}{\rho} = \dfrac{۱}{\rho_۱} + \dfrac{۱}{\rho_۲}$ می‌رسیم.



نکته: در یک تیر تحت اثر خمش خالص نیروی وارد بر یک قسمت از مقطع برابر است با:

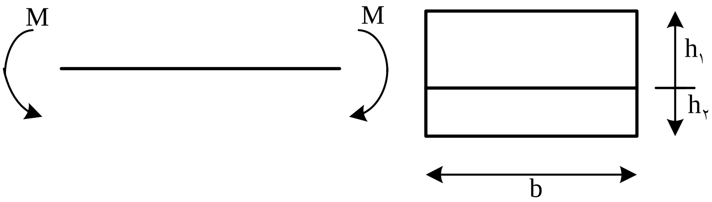
$F = \dfrac{MQ_a}{I}$ (نیروی وارد بر قسمت a از مقطع تیر)

M: ممان خمش وارده به تیر

Q_a: لنگر استاتیک اول قسمت a نسبت به تار خنثی

I: ممان اینرسی کل مقطع

مثال: تیری با مقطع روبرو تحت خمش قرار دارد.نسبت تنش خمشی ماکزیمم تسمه اول به تسمه دوم چقدر است؟



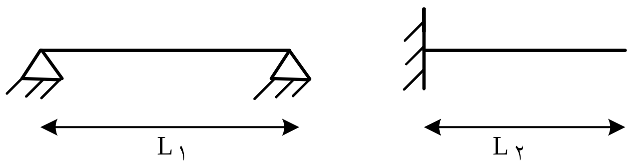
حل: پس از خم شدن تیر، شعاع انحنای هر دو تسمه، تقریباً با هم برابر است پس در مورد لنگرهای هر کدام از تسمه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{EI_1}{M_1}=\frac{EI_2}{M_2}\Rightarrow\frac{M_1}{M_2}=\frac{I_1}{I_2}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$$

در مورد نسبت تنش‌های خمشی داریم:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\frac{M_1}{S_1}}{\frac{M_2}{S_2}}=\frac{\frac{M_1}{h_1^2}}{\frac{M_2}{h_2^2}}=\frac{M_1}{M_2}\times\frac{h_2^2}{h_1^2}=\frac{h_1^3}{h_2^3}\times\frac{h_2^2}{h_1^2}=\frac{h_1}{h_2}$$

مثال (کنکور ارشد ۷۸): دو تیر شکل روبرو از جنس یکسان و با مقطع یکسان می‌باشند. تنش خمشی آنها بر اثر وزن خود یکی می‌باشد. نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ چقدر است؟



۱) $l_1=l_2$ ۲) $l_1=l_2\sqrt{2}$ ۳) $l_1=2l_2$ ٤) $l_1=2\sqrt{2}L_2$

حل: ابتدا لنگر خمشی حداکثر را به دست می‌آوریم: $M_2=\frac{wl_2^2}{2}$, $M_1=\frac{wl_1^2}{8}$

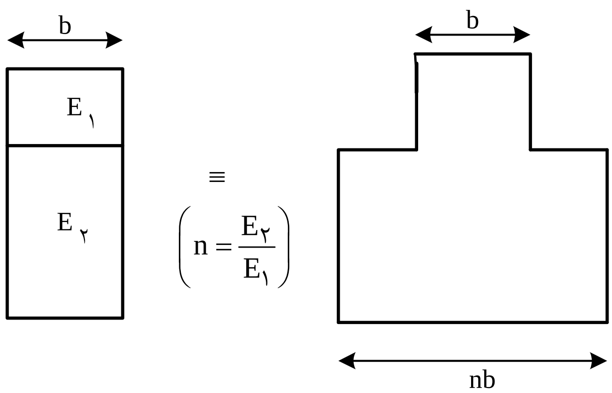
با توجه به برابر بودن S_1 و S_2 داریم:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\frac{M_1}{S_1}}{\frac{M_2}{S_2}}=\frac{\frac{l_1^2}{8}}{\frac{l_2^2}{2}}=\frac{l_1^2}{4l_2^2}=1\Rightarrow l_1=2l_2$$

گزینه ۳ صحیح است.

- خمش تیرهای دو جنسی:

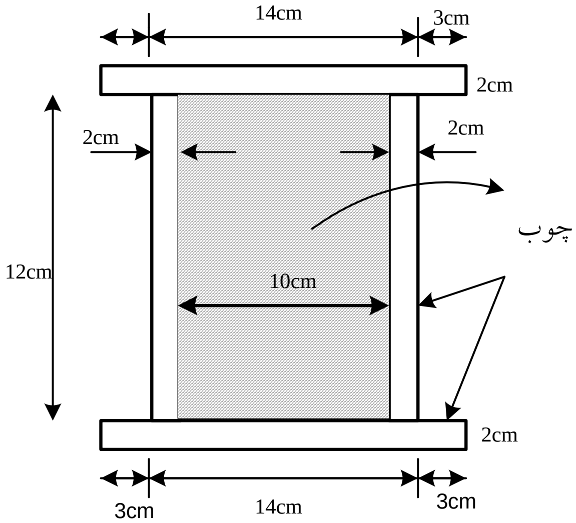
اگر مقطع تیر از دو جنس با مدول یانگ E_1 و E_2 تشکیل شده باشد، می‌توان برای سادگی کار، مقطع را تبدیل کرد به مقطع معادل از جنس اول یا مقطع معادل از جنس دوم. و I و S و... را برای این مقطع جدید محاسبه نمود. فقط باید توجه نمود که، تنش محاسبه شده در قسمت‌های معادل شده مقطع باید در ضریب n (نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ یا $\frac{E_1}{E_2}$) ضرب شود.



مقطع معادل از جنس E_1

مثال (کنکور ارشد ٧٤): چنانچه مقطع تیری که از فولاد و چوب تشکیل شده است تحت تأثیر لنگر $M=۲۴۰KN.m$ قرار گیرد، مقدار نیرویی که بال فوقانی تحمل می‌کند، چقدر است؟

($E=۱\times۱۰^{۵}\,\frac{kg}{cm^{۲}}$ چوب و $E=۲\times۱۰^{۶}\,\frac{kg}{cm^{۲}}$ فولاد)



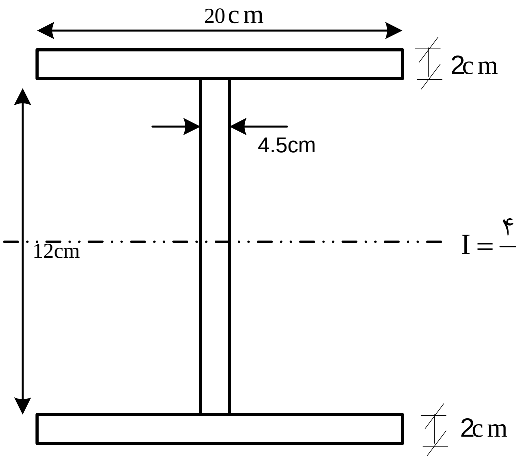
حل: ابتدا مقطع معادل از فولاد را تشکیل می‌دهیم:

$$n=\frac{E_{چوب}}{E_{فولاد}}=\frac{۱\times۱۰^{۵}}{۲\times۱۰^{۶}}=\frac{۱}{۲۰}$$

$\Rightarrow$ ضخامت جان چوب تبدیل یافته $=۱۰cm\times\frac{۱}{۲۰}=۰/۵cm$

(۱۰cm چوب معادل ۰/۵ cm فولاد)

پس مقطع، به شکل روبرو تبدیل می‌شود:



$$I=\frac{۴/۵\times۱۲^{۳}}{۱۲}+۲\times\left[\frac{۲۰\times۲^{۳}}{۱۲}+۲\times۲۰\times۷^{۲}\right]=۴۵۹۵cm^{۴}$$

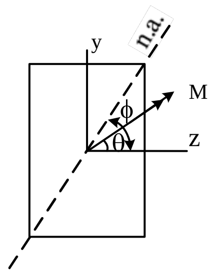
طبق نکته ذکر شده در صفحات قبل:

$$F_{بال}=\frac{MQ_{بال}}{I}$$

$$Q_{بال}=۲\times۲۰\times۷=۲۸۰cm^{۳}\Rightarrow F=\frac{MQ}{I}=\frac{(۲۴۰\times۱۰۰)(۲۸۰)}{۴۵۹۵}=۱۴۶۲KN$$

- خمش دوجانبه:

اگر لنگر M وارده به مقطع در راستای یکی از دو محور اصلی مقطع نباشد باید آن را به دو مؤلفه عمود بر هم تجزیه نمود در این حالت داریم:



معادله خط محور خنثی $\tan\phi=\frac{I_z}{I_y}.\tan\theta\Rightarrow\frac{y}{z}=\frac{I_z}{I_y}.\frac{M_y}{M_z}$

(θ: زاویه لنگر با محور z مقطع)

(ϕ: زاویه تار خنثی با محور z مقطع)

- با توجه به رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت:

۱- همواره محور خنثی بین بردار لنگر خمشی M و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

۲- اگر در مقطعی $I_z=I_y$ (مثل مقطع مربع و دایره)، $\phi=\theta$ یا به عبارت دیگر در این گونه مقاطع، M در هر راستایی اعمال شود، تار خنثی منطبق بر راستای بردار M می‌باشد.

در حالت کلی بارگذاری روی مقطع که نیروی محوری P و لنگرهای خمشی M_y و M_z داریم، تنش برابر است با:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

– هسته مرکزی یک مقطع (kern): مکان هندسی نقاطی که اگر بار روی آنها اعمال شود، کل مقطع یا تحت فشار خواهد بود یا تحت کشش (بسته به فشاری یا کششی بودن بار)

– نکات:

۱– اگر نیرویی روی مرز هسته وارد شود، تنش تنها در یک رأس محیط مقطع صفر خواهد شد ولی اگر نیرو در یکی از رئوس هسته وارد شود تنش در یک ضلع محیط مقطع صفر خواهد شد.

۲– هر چه نیرو به مرکز مقطع نزدیک‌تر شد، تار خنثی از مقطع دورتر می‌شود و بالعکس. در دو حالت حدی داریم:

نیرو در بی‌نهایت← تار خنثی در مرکز مقطع (خمش محض) و نیرو در مرکز مقطع← تار خنثی در بی‌نهایت (تنش محوری خالص)

۳– هسته مرکزی یک n ضلعی محدب، همواره یک n ضلعی محدب می‌باشد.

٤– در چند ضلعی‌های مقعر کافی است که چند ضلعی محدب محیط بر مقطع را رسم کنیم. هسته مرکزی چند ضلعی محدب جدید به صورت شماتیک بیانگر هسته مقطع مقعر می‌باشد.

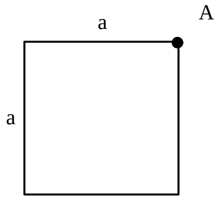
۵– هسته مقاطع زیر را به خاطر بسپارید:

– مستطیل به ابعاد b و h ← لوزی هم مرکز با آن به طول اقطار $\frac{b}{۳}$ و $\frac{h}{۳}$

– لوزی به اقطار b و h ← مستطیل هم مرکز با آن به طول اضلاع $\frac{b}{۶}$ و $\frac{h}{۶}$

– مقطع دایره به شعاع r ← دایره هم مرکز با آن به شعاع $\frac{r}{۴}$

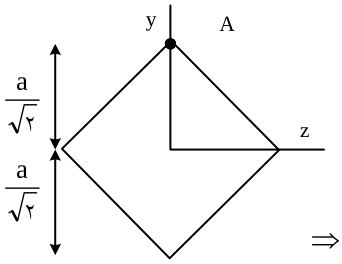
مثال (کنکور ارشد ۸۳): مقطع یک عضو سازه‌ای مربع مستطیل مطابق شکل می‌باشد. برآیند تنش‌ها در مقطع، یک نیروی عمودی فشاری در A می‌باشد. قدر مطلق تنش فشاری چند برابر تنش کششی است؟



۱) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۲) ۲/۲

۳) ۳ ٤) ۱/٤

حل می‌توانیم مقطع را °٤۵ بچرخانیم. (و می‌دانیم که I مربع حول هر محوری $\frac{a^۴}{۱۲}$ است)

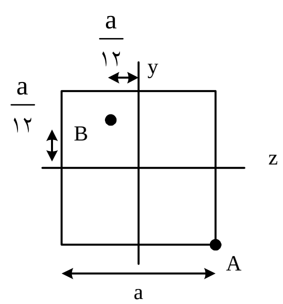


$$\sigma_{min}^{max} = \frac{p}{A} \pm \frac{Mc}{I} \qquad (\text{و } c = \frac{a}{\sqrt{۲}} \text{ و } M = \frac{pa}{\sqrt{۲}})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{p}{a^۲} + \left(\frac{pa}{\sqrt{۲}}\right) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{۲}}\right) \cdot \frac{۱}{\frac{a^۴}{۱۲}} = \frac{۷p}{a^۲} \\ \sigma_{min} = \frac{p}{a^۲} - \left(\frac{pa}{\sqrt{۲}}\right) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{۲}}\right) \cdot \frac{۱}{\frac{a^۴}{۱۲}} = -\frac{۵p}{a^۲} \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}\right| = ۱/۴ \Rightarrow$$

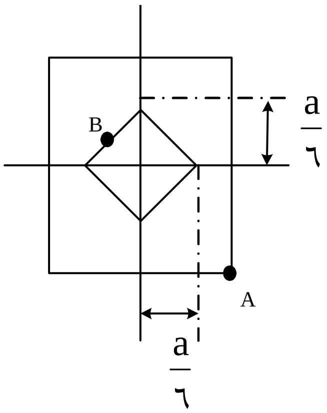
گزینه ٤ صحیح است.

مثال (کنکور ارشد ٧٤): اگر محل اثر منتجه نیروی فشاری بر یک فونداسیون مربع شکل در نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{۱}{۱۲}$ ضلع مربع از دو محور تقارن باشد، (B) تنش در کنج ربع مقابل (A) چقدر است؟

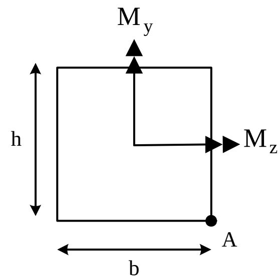


۱) $\frac{۲p}{a^۲}$ ۲) $\frac{p}{a^۲}$ ۳) صفر ٤) هیچ کدام

حل: می‌توان معادله تنش را نوشت و مقدار آن را به دست آورد.
اما با کمی دقت در شکل می‌توان فهمید که نقطه اعمال بار روی یکی از اضلاع هسته مرکزی مقطع قرار دارد. در نتیجه، مقدار تنش در رأس ربع مقابل صفر است. گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



مثال) در یک مقطع مستطیل به ابعاد $b=10cm$ و $h=15cm$، لنگرهای $M_z=5t.m$ و $M_y=20t.m$ اثر می‌کند. معادله محور خنثی کدام است؟



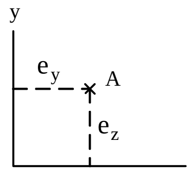
حل: از نکات قبلی داشتیم:

$$\frac{y}{z}=\frac{I_z}{I_y}.\frac{M_y}{M_z}$$ (معادله خط محور خنثی در حالت خمش دو محوره)

$$\Rightarrow \frac{y}{z}=\frac{bh^3}{hb^3}.\frac{M_y}{M_z}=\frac{10\times 15^3}{15\times 10^3}.\frac{20}{5}=9 \Rightarrow y=9z$$

نکته: در بارگذاری کلی که علاوه بر خمش دوجانبه، نیرو هم داریم، معادله خط تار خنثی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$1+\frac{e_y}{r_y^2}z+\frac{e_z}{r_z^2}Y=0$$



که در آن:

- e_z و e_y: خروج از محوریت بار به ترتیب نسبت به محورهای z و y می‌باشد.
- r_z و r_y: شعاع ژیراسیون‌های مقطع می‌باشند

$$\left(r_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad r_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}\right)$$